

二维 Fourier 带窗内插模板的设计

苏 飞 王兆华

(天津大学电子信息工程学院, 天津 300072)

摘 要 为了更好地恢复亚奈奎斯特图像以减少失真, 选择好的内插模板是关键。通过对一种新的一维频率域重叠数字滤波器的理论分析, 找到了对应的 FIR 滤波器模型和线性相位的满足条件。据此给出二维 Fourier 加窗内插模板的设计方案。对 7×7 无窗、单窗和双窗 3 种模板的传输特性进行了比较, 指出带窗模板在通带区域内波纹起伏明显少于无窗模板。3 种带窗模板中, 双窗的平滑性优于单窗和无窗, 但具有较大的过渡沿。分别用 7×7 、 11×11 和 17×17 阶模板对具有不同频率分布的亚采样灰度图像进行了内插处理模拟实验, 并对结果进行了分析和比较, 验证了用带窗模板恢复亚奈图像可以获得较高的信噪比, 提高了恢复图像的主客观质量。

关键词 窗函数 内插模板 重叠滤波器 边界效应

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2004)04-0439-06

Design of 2-Dimension Fourier Interpolating Template with Window

SU Fei, WANG Zhao-hua

(Electronic Engineering School, Tianjin University, Tianjin 300072)

Abstract Choosing a good interpolating template is the key to better recover the subsampled image with low distortion. In this paper, by analysis of a novel 1-dimension overlapping digital filter in frequency domain, the corresponding model of FIR filter and the condition for linear phrase are presented. According to the above result, the ways to design 2-dimension interpolating template without window, with single and double windows are respectively introduced. Transmission properties of 7×7 templates of three systems are compared in detail, which indicates that the ripples in the pass period of windowed template are obviously much fewer than that of template without window. Among the three types of systems, template with double windows is better than that of single window and none window in smoothness but has the widest transition period. Finally, the simulations to recover the subsampled images with different frequency components by applying 7×7 、 11×11 and 17×17 templates are made, as well as analyzing and comparing the results. It proves that the images recovered by three types of windowed templates from subsampled image have higher SNR and better subjective and objective quality than that recovered in no overlapping way.

Keywords window function, interpolating template, overlapping filter, block effect

1 引 言

在数字图像处理中, 一般将图像分解成许多子块进行各种运算。这种有限的正交变换处理方法在边缘处会引起图像质量的损伤, 如在 Fourier 变换中, 在交界处会出现 Gibbs 效应。为了克服边缘效应, 提高图像质量, 已提出许多方法, 如重复像素和

线性插值。重复像素法就是将图像在行和列方向上分别重复已有像素的值来恢复图像的方法。这种方法的实现简单, 但恢复后的图像有明显的方块效应; 线性插值法是将图像在行和列方向进行线性内插来恢复图像, 其优点是消除了方块效应, 但图像的信息丢失。

小波方法^[1~3]和邻域像素交换法^[4,5]是近年来提出的新的恢复亚取样图像的方法。通过邻域像素

交换可以降低块单元之间的不连续效应,其核心是选择交换算子。小波方法的原理就是利用小波的反变换构造滤波器组进行图像的重构,它是一种全局运算,因此不会造成方块效应,但运算量及复杂度都较大。

重叠滤波是另一种可以有效克服边缘效应的方法^[6]。在重叠滤波中,子图像是逐点进行重叠的。如果子图像的尺寸为 $N \times N$,则对任一样点,与它有关的相互重叠的子图像有 N^2 个,这 N^2 个子图像的输出之和即为重叠滤波的输出。对应的重叠滤波器可以表示为一个 $(2N-1) \times (2N-1)$ 的模板。经模板处理后的图像,不存在边界效应。

传统设计模板的方法是用并元卷积的方法^[7],计算过程复杂且物理意义不明确。为此给出一种新的带窗设计方案,选择不同的窗函数可以设计出不同形式的模板。实验表明,用此方法得到的模板处理图像比传统模板处理的效果有所改进。

2 一维频率域重叠数字滤波器结构图

观察图 1 所示系统^[8],并作标记如下:

$$x_n = [x(n-N+1) \quad x(n-N+2) \quad \cdots \quad x(n)] \quad (1)$$

$$H = \text{diag}(H_0 \quad H_1 \quad \cdots \quad H_{N-1}) \quad (2)$$

$$B_n = \text{diag}(b_n(0) \quad b_n(1) \quad \cdots \quad b_n(N-1)) \quad (2)$$

$$F_n = \text{diag}(f_n(0) \quad f_n(1) \quad \cdots \quad f_n(N-1))$$

$$W = [\omega_{c,r}]_{N \times N}, \omega_{c,r} = e^{-j\frac{2\pi}{N}cr} \quad (3)$$

$$S = [s_0 \quad \cdots \quad s_{N-2} \quad s_{N-1}]^T$$

$$\begin{aligned} y(n-N+1) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ b(i) \sum_{j=0}^{N-1} [h(-i-1-j)x(n+i-N+1+j)f(N-1-j)] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ b(i) \sum_{k=-i}^{-i+N-1} [h(k)x(n-k)f(k+i)] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \left(b(0) \sum_{k=0}^{N-1} f(k) + b(1) \sum_{k=-1}^{N-2} f(k+1) + \cdots + b(N-1) \sum_{k=-N+1}^0 f(k+N-1) \right) h(k)x(n-k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \{ [b(N-1-k) * f(k+N-1)] [h(k)x(n-k)] \} \\ &= \sum_{k=-N+1}^{N-1} [c(k)h(k)x(n-k)] \\ &= h'(n) * x(n) \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$k = -i + N - 1 - j$$

$$c(k) = \frac{b(N-1-k) * f(k+N-1)}{N}$$

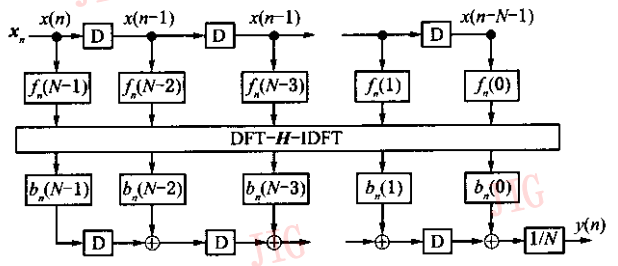


图 1 带双窗的频率域重叠滤波器

式中, S 是抽取算子,其中 $s_i (i=0, 1, \dots, N-1)$ 是第 i 个元素为 1 其余等于 0 的 N 维列向量。

由图 1 可知,某一样点的输出是与其对应的输入样点的 $N-1$ 次移位输出的和的平均,即

$$\begin{aligned} x(n) \quad x(n-1) \quad \cdots \quad x(n-N+1) &\rightarrow y^{(0)}(n) \\ x(n+1) \quad x(n) \quad \cdots \quad x(n-N+2) &\rightarrow y^{(1)}(n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots &\cdots \\ x(n+N-1) \quad x(n+N-2) \quad \cdots \quad x(n) &\rightarrow y^{(N-1)}(n) \end{aligned}$$

则

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y^{(i)}(n) \quad (4)$$

其中, $y^{(i)}(n)$ 是对应输入 x_{n+i} 中 $x(n)$ 的输出值。从图中可以看出,对应输入样点 x_n 第 i 次移位后的输出为

$$y^{(i)}(n) = \frac{1}{N} S_i^T B_{n+i} W^* H W (F_{n+i} x_{n+i}) \quad (5)$$

其中, W^* 是 W 的共扼矩阵。结合式(4)和式(5),并考虑到延迟,得到对应 x_n 的输出 y_n 为

$$y(n-N+1) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} [S_i^T B_{n+i} W^* H W (F_{n+i} x_{n+i})] \quad (6)$$

因前后窗序列是时间的常数,故展开上式得

从结果可以看出,这种带前后窗的系统等效为一个加窗的 FIR 滤波器,且 FIR 中的窗序列是由此系统中后窗的自身镜像序列和前窗左移其长度后卷积形成。把这种同时带有前后窗的系统称为带双窗

的频率域重叠滤波器系统。由式(7)可以看出,当 c 为对称序列时系统具有线性相位,所以

$$\begin{aligned} c(k) &= \frac{b(N-1-k) * f(k+N-1)}{N} \\ &= \frac{b(-k) * f(k)}{N} \\ &= c(-k) = \frac{b(k) * f(-k)}{N} \end{aligned} \quad (8)$$

↓

$$f(k) = b(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

综上,图 1 所示的带有双窗的重叠式频率域滤波器等效为一个加窗的 FIR 滤波器,且窗之间具有卷积关系。当图 1 系统中两窗序列相等时,系统具有线性相位。

3 二维重叠滤波模板的设计

一维滤波器的模板等于滤波器的单位冲击响应 h 的周期扩展 h' 和窗 c 的对应元素相乘。对于二维模板,此结论依然成立。二维模板对图像的处理,某点的输出是与该点有关的全部输入的子图像输出的和的平均。一个 3×3 阶模板的滑动过程如图 2 所示,图中“·”是待求样点。

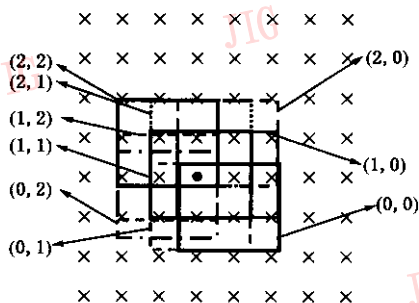


图 2 二维重叠滤波示意图

$N \times N$ 阶滤波器所对应的模板是 $(2N-1) \times (2N-1)$ 阶的,且由下式得到

$$T = h' \otimes W_{2N-1} \quad (9)$$

符号 \otimes 表示两矩阵对应元素相乘。 W_{2N-1} 是模板中的窗,对于 N 阶的系统

$$\begin{cases} \text{无窗:} & W_{2N-1}^n = (R_N * R_N)^T (R_N * R_N) \\ \text{三角单窗:} & W_{2N-1}^s = (T_N * R_N)^T (T_N * R_N) \\ \text{三角双窗:} & W_{2N-1}^d = (T_N * T_N)^T (T_N * T_N) \end{cases} \quad (10)$$

其中, R_N 和 T_N 分别表示长度为 N 的矩形序列和对称三角序列。这样,只要给定系统的传输特性 H ,就可以按式(9)给出对应的 3 种模板。如 $N=4$ 时的低

通特性 H 及响应 h 和 h' 以及 3 种窗分别如下

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$h' = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$h = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 8 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

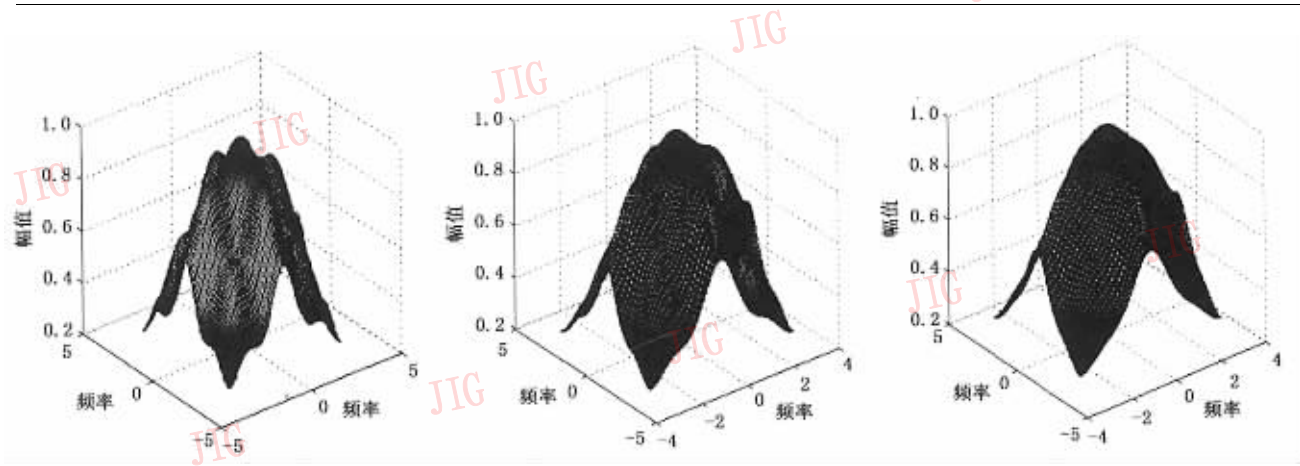
$$W_{2N-1}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 12 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{2N-1}^s = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 18 & 15 & 9 & 3 \\ 5 & 15 & 25 & 30 & 25 & 15 & 5 \\ 6 & 18 & 30 & 36 & 30 & 18 & 6 \\ 5 & 15 & 25 & 30 & 25 & 15 & 5 \\ 3 & 9 & 15 & 18 & 15 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$W_{2N-1}^d = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 10 & 8 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 32 & 40 & 32 & 16 & 4 \\ 8 & 32 & 64 & 80 & 64 & 32 & 8 \\ 10 & 40 & 80 & 100 & 80 & 40 & 10 \\ 8 & 32 & 64 & 80 & 64 & 32 & 8 \\ 4 & 16 & 32 & 40 & 32 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 10 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

将 h 和 3 种窗分别代到式(9)中,就得到相应的 3 种模板。对高通滤波器以及更高阶滤波器所对应的模板也可以按此方法来获得。以式(11)给出的 H 为例,所对应的 3 种模板的传输特性如图 3 所示。

可以看出,带窗的模板特性明显比无窗模板特性平滑,带双窗的特性又比单窗特性平滑,但过渡带



(a) 无窗模板

(b) 三角单窗模板

(c) 三角双窗模板

图 3 3 种 7×7 阶重叠模板特性曲线

较宽。

对更高维的带窗模板特性,其优点更为突出。

4 实验与结果

在亚缩码率的各种算法中,亚奈奎斯特取样技术十分引人注目。然而,这样处理的信号会出现频谱混叠。但亚奈取样信号的二维谱在一般图像中是不混叠的,或比一维有少得多的混叠失真^[6]。因此,可以采用模板来对采样后的信号进行恢复。

4.1 亚奈取样灰度图像的二维 Fourier 谱分析

一个静止图像可以用一个二维矩阵来表示,且图像的能量一般集中在中低频。设图像的 4×4 子块矩阵 A 及其频谱 S 为

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & s_{03} \\ s_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{30} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于 A 的亚奈取样,得到的信号可由下式求出

$$A_s = \frac{1}{2} [A \otimes (I + P)] \quad (14)$$

式中, $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, P 为高频调制矩阵,一般有

两种形式

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

这里,取第 1 种形式。由式(14)可知, A_s 所对应的谱 S_s 为

$$S_s = F(A) \otimes [F(I + P)/2] / 4 \quad (15)$$

其中, F 表示二维 Fourier 变换, \otimes 表示循环卷积。所以

$$S_s = S \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & s_{03} \\ s_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{30} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & s_{03} \\ s_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{30} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{30} & 0 \\ 0 & s_{03} & s_{00} & s_{01} \\ 0 & 0 & s_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & 0 & s_{03} \\ s_{10} & 0 & s_{30} & 0 \\ 0 & s_{03} & s_{00} & s_{01} \\ s_{30} & 0 & s_{10} & 0 \end{bmatrix}$$

由式(6)可以看出,经过亚奈取样后得到的图像的频

谱比原来多出一部分高频调制部分。因此,可以用一低通滤波器来恢复原图像数据。一个典型的 4 阶低通 Fourier 低通滤波器如式(11)。显然,当图像只包含有低频成分时,这种恢复是无失真的。然而,如果图像的高频成分越多,恢复效果则并不理想。

4.2 实验结果

采用标准图像 $256 \times 256 \times 8\text{bit}$ 的 rice、kids 和 test 图像(图 4)进行非重叠内插恢复和重叠内插恢复两种测试。其中,在重叠内插恢复中分别采用 7 阶、11 阶和 17 阶的无窗、单三角窗和双三角窗进行测试。

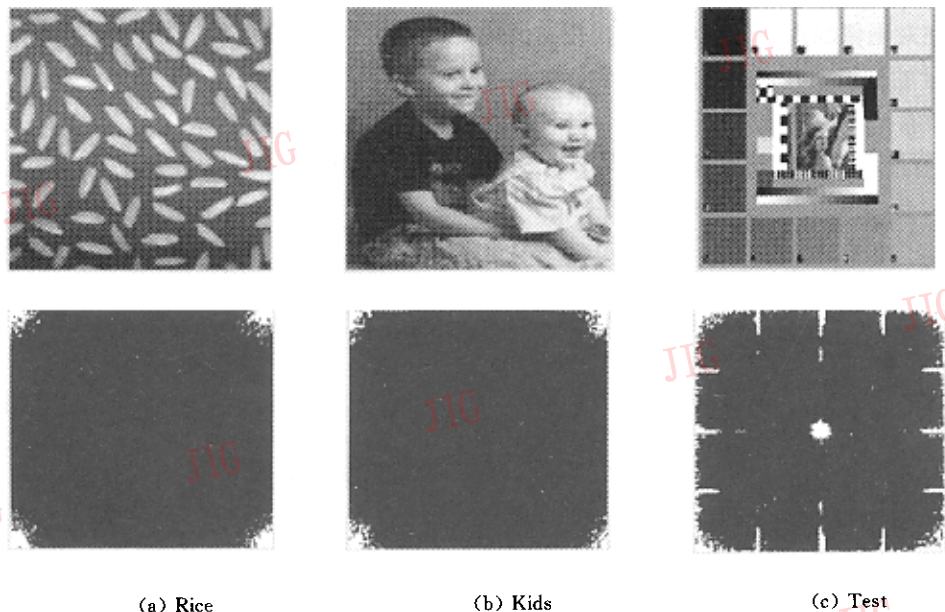


图 4 测试图及其频谱分布

表 1 给出了上面 3 种测试图用不同模板恢复后峰值信噪比 PSNR 比较。

表 1 3 种测试图像的 4 种插值结果 (PSNR)

图像	阶数	非重叠	无窗重叠	单窗重叠	双窗重叠
rice	7×7	33.36	42.11	45.12	43.36
	11×11	33.81	43.36	48.13	48.13
	17×17	34.15	45.12	48.13	48.13
kids	7×7	33.51	37.72	38.13	38.13
	11×11	33.98	38.13	38.59	38.59
	17×17	34.51	38.13	38.59	38.59
test	7×7	21.46	21.87	21.92	21.94
	11×11	21.08	21.41	21.53	21.70
	17×17	20.74	21.04	21.16	21.43

表 1 中,PSNR 为

$$\text{PSNR} = 10 \log \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right) \quad (17)$$

MSE 表示均方误差。

实验结果表明,重叠法比非重叠法恢复的亚奈采样图像有更高的信噪比;在 3 种模板中,带窗模板的特性优于无窗模板;当图像的高频成分较少时,利用重叠法模板可以很好地恢复图像;当高频成分丰富时,恢复得到的图像信噪比较低,但利用加窗模板使得结果得以改善。而且,由于高频成分的存在,临近像素相关性减弱,所以,高阶模板处理的效果比低阶模板差。限于篇幅,只给出 Test 图像实验结果如图 5 所示。

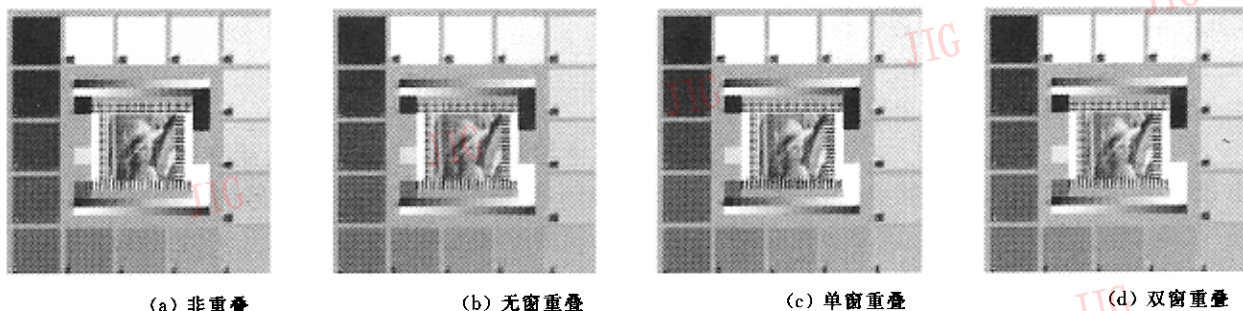


图 5 11 阶 4 种模板插值恢复 test 得到的图像

5 结 论

本文给出了一种新结构的带双窗频率域重叠滤波器,该滤波器具有连续输入输出的特点。据此设计出无窗、单窗和双窗3种模板,带窗模板的特性具有更好的平滑性,在对图像的内插处理中可得到较高的信噪比。但在设计的过程中并未结合图像的实际频谱分布,因而算法具有一定的局限性。所以,设计一种时变的基于图像内容的模板可得到更好的效果。

参 考 文 献

- 1 Gopinath R A, Burrus C S. Wavelet based lowpass/bandpass interpolation[A]. In: Proceedings of 1992 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. San Francisco, California, USA, 1992, 4: 385~388.
- 2 Nguyen N, Milanfar P. An efficient wavelet-based algorithm for image superresolution [A]. In: Proceedings of Seventh International Conference on Image Processing[C], Vancouver, British Columbia, Canada, 2000, 4: 351~354.
- 3 Mallet S. A theory for multiresolution signal decomposition; The wavelet representation[J]. IEEE Transactions on PAMI, 1989, 11(7): 674~693.

- 4 Wang Zhaohua. Amplifying pattern of video wall[J]. 世界广播电视, 1991, 5(11): 59~60.
- 5 王兆华. 邻域交换内插法[J]. 信号处理, 1993, 9(1): 385~388.
- 6 王兆华. 用二维重叠数字滤波器在生亚 Nyquist 取样 PAL 信号[J]. 天津大学学报, 1983, 1: 47~64.
- 7 王兆华. 计算机图象处理方法[M]. 北京: 宇航出版社, 1993: 139~149.
- 8 王兆华, 韩萍, 曹继华. FOURIER 重叠数字滤波器[J]. 信号处理, 2001, 17(2): 189~191.



苏 飞 1975 年生, 2001 年获天津大学电信学院信号与信息处理专业硕士学位, 现为该专业博士研究生。研究方向为视频处理、频率域自适应数字滤波器。

王兆华 1937 年生, 教授, 博士生导师, 1961 年毕业于北京清华大学无线电电子学系电真空专业。研究领域为数字图像处理、数字滤波器等。